b) On a : $U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

D'où : $S_n \leq 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + ... + \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Or $1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + ... + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

D'où : $S_n \leq 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

c) On a : $S_n \leq 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \leq 2$

$\begin{cases} (S_n) \text{ est une suite croissante} \\ (S_n) \text{ est majorée par 2} \end{cases}$ D'où (S_n) est convergente

On note $\ell = \lim\limits_{x \to +\infty} S_n$

on a : $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_n > U_0$ car $U_n > 0$
d'où : $S_n > 1$ et par suite $\ell \geq 1$
on a : $S_n \leq 2$ d'où $\ell \leq 2$
conclusion : $1 \leq \ell \leq 2$

Solution 2 :

1°/ On a : $U_0 = \frac{1}{2}$ d'où $0 < u_0 < 1$

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $0 < U_n < 1$ et montrons que $0 < U_{n+1} < 1$

On a : $U_{n+1} = \frac{2U_n}{U_n^2 + 1} > 0$ car $U_n > 0$

$$U_{n+1} - 1 = \frac{2U_n}{U_n^2 + 1} - 1 = \frac{2U_n - U_n^2 - 1}{Un^2 + 1} = \frac{-(U_n - 1)^2}{U_n^2 + 1} < 0$$

D'où : $0 < U_{n+1} < 1$
Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N} : 0 < U_n < 1$.